УДК 511.17

Применение СКА Maple на примере изучения основ «Теории чисел»

Халидова О.Х.

ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт» (355029 г. Ставрополь, ул. Ленина, 417 «А»), e-mail:oxana795@yandex.ru

Оленев А.А.

ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт» (355029 г. Ставрополь, ул. Ленина, 417 «А»), e-mail: olenevalexandr@gmail.com

В данной статье ставится задача рассмотреть применение системы компьютерной алгебры Maple для решения некоторых задач раздела «Целые числа» дисциплины «Теория чисел». Основное внимание уделяется теме «Наибольший общий делитель целых чисел». Появление современных систем компьютерной алгебры позволяет качественно изменить подходы и методы изложения материала, сделать его более интересным и привлекательным для основной массы обучающихся. Данную программу можно использовать на всех уровнях обучения математике, так как Maple позволяет изменять и неограниченно обогащать содержание образования, выполнение любого задания, упражнения с помощью СКА создает возможность для повышения интенсивности урока. Системы компьютерной алгебры способствуют привитиюнавыков самоконтроля и самостоятельного исправления своих ошибок. Пожалуй, главным недостатком использования СКА может являться то, что помимо ошибок в изучении целевого материала, которые ученик делает и на традиционных уроках (не используя СКА), появляются еще технологические ошибки - ошибки работы с программой. Таким образом, информационные технологии, в совокупности с правильно подобранными технологиями обучения, создают необходимый уровень качества, вариативности, дифференциации и индивидуализации обучения.

Ключевые слова: информатизация, система компьютерной алгебры Maple, теория чисел, наибольший общий делитель, множители.

The use of CAS Maple on the example of learning the basics of "Theory of Numbers"

Khalilova O. K.

GBOY VO "Stavropol State Pedagogical Institute" (355029 Stavropol, Lenin street, 417 "A"), e-mail:oxana795@yandex.ru

Olenev A. A.

GBOY VO "Stavropol State Pedagogical Institute" (355029 Stavropol, Lenin street, 417 "A"), e-mail: olenevalexandr@gmail.com

This article aims to consider the application of the computer algebra system Maple to solve some problems of the section "Integers" of the discipline "number Theory". Basic attention is paid to the topic "the Greatest common divisor of integers". The emergence of modern systems of computer algebra can qualitatively change the approaches and methods of presentation of the material to make

it more interesting and attractive to the bulk of students. This program can be used at all levels of mathematics training, as Maple allows you to change and enrich the content of education indefinitely, the performance of any task, exercise with the help of SKA creates an opportunity to increase the intensity of the lesson. Computer algebra systems contribute to instilling the skills of self-control and self-correction of their mistakes. Perhaps the main drawback of the use of CAS may be that in addition to errors in the study of the target material, which the student does in traditional lessons (not using CAS), there are still technological errors - errors in working with the program. Thus, information technologies, together with properly selected learning technologies, create the necessary level of quality, variability, differentiation and individualization of learning.

Key words: informatization, Maple computer algebra system, number theory, greatest common divisor, multipliers.

Процесс перехода общества к новому уровню развития всех сфер человеческой деятельности связан с таким процессом, как информатизация. Информатизация – это системный процесс, сопровождающийся внедрением достижений методов информатики и новых информационных технологий (ИТ) в общественную жизнь, в научно-технические, социально-экономические, правовые и другие институты государства с целью повышения их эффективности. Так как уровень развития государства теперь напрямую связан с информатизацией общества, то необходимо владеть знаниями об информационных процессах и уметь применять их на практике. Роль учителя математики и информатики в настоящее время, занимает главенствующую роль в жизни подрастающего поколения. Кроме того, учителю необходимо научиться определять метапредметную связь между этими дисциплинами для осуществления успешной подготовки школьников к сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Одним извозможных способов применения информационных технологий на уроках математики является использование системы компьютерной алгебры (СКА) Maple.

Рассмотрим применение СКА Mapleна примере изучения такой дисциплины, как «Элементарная теория чисел». Элементарная теория чисел – это раздел теории чисел, изучающий свойства целых чисел элементарными методами» [2]. Современный учитель просто обязан владеть знаниями в области теории чисел, так как задачи, входящие в эту предметную область включены в программу общего среднего образования, а также и олимпиады по математике. Многие вопросы элементарнойтеории чисел входят в единый государственный экзамен по математике на профильном уровне и относятся к наивысшему уровню сложности. Решение задач теории чисел предусматривает владение формальным математическим языком на высокомуровне. Особенностью решения таких задач является

необходимость постоянного преобразования информации с математического языка на естественный и обратно.

Прирешении задач теории чисел используются различные математические методы. В зависимости от темы они могут быть решены разнообразными способами, в том числе, с использованием возможностей СКА Maple.

Рассмотрим применение СКА Maple на примере изучения темы «Целые числа». Для того чтобы определить наиболее важные характеристики целых чисел необходимо умение раскладывать целое число на составные множители, находить наибольший общий делитель и др.

Наибольший общий делитель – это наибольшее число, на которое данные числа делятся без остатка.

Из свойств делимости мы понимаем, что если b – делитель целого числа a и a отлично от нуля, то модуль числа b – не превосходит модуля числа a. Значит, число делителей любого целого числа, которое не равно нулю, конечно. Тогда количество общих делителей нескольких чисел тоже конечно. Следовательно, из всех общих делителей данных чисел можно выделить наибольшее число.

Чтобы решить такую задачу, как нахождение НОД можно поступить следующим образом:

1. Разложить оба числа на множители по степеням простых чисел:

$a = 2^{\alpha_1} * 3^{\alpha_2} * \ldots * {p_n}^{\alpha_n},\ b = 2^{\beta_1} * 3^{\beta_2} * \ldots * {p_n}^{\beta_n},$ (*некоторые* α_k *и* β_k могут быть равны нулю).

Пример 1: Разложить целые числа 96 и 116 на множители.

Решение:

$$96 = 2^5 * 3$$

$$116 = 2^2 * 29$$

Для наглядности решение так же можно представить в таком виде:

1)Разложение на множители числа 96:

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

2) Разложение на множители числа 116:

116	2
58	2
29	29
1	

Для разложения на простые множители в Maple можно использовать функцию: *ifactor(C)* [3].

Пример 2. Разложить на простые множители число 96.

$$\text{ifactor}(96);$$

$$(2)^5\,(3)$$

Рис.1.Пример разложения числа в СКА Maple.

2. Затем применить формулу нахождения НОД:

$$НОД(a,b) = 2^{\min(\alpha_1,\beta_1)} * 3^{\min(\alpha_2,\beta_2)} * \ldots * p^{\min(\alpha_n,\beta_n)}$$

Главный недостаток данного способа – это большие временные затраты на выполнение вычислений.

Пример 3. Для примера нахождения НОД используем числа 162 и 48:

Решение: $162 = 2 * 3^4$

$$48 = 2^4 * 3$$

$$НОД = 2^1 * 3^1 = 6$$

Для реализации данного алгоритма в Maple воспользуемся командами нахождения делителей числа (divisors(n)), пересечения (*intersect(a))* двух множеств, а также нахождения максимального элемента (*max(a)*) [1].

$$divisors(162);$$

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162\}$$

$$> divisors(48);$$

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$>\text{intersect}(\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\});$$

$$\{1, 2, 3, 6\}$$

$$>\max(\{1, 2, 3, 6\});$$

$$6$$

Рис.2. Реализация алгоритма нахождения НОД в СКА Maple.

Ответ: $НОД(162,48) = 6$

Простейшим способом нахождения наибольшего общего делителя оказывается использование системы компьютерной алгебры Maple, которая автоматически вычислит НОД. Что бы найти наибольший общий делитель применяется специальная функция *igcd(a, b).*

Для проверки примера 3 используем систему компьютерной алгебры Maple [4]:

$$> igcd(162, 48);$$

$$6$$

Рис.3. Нахождение НОД с использованием специальной функции в СКА Maple.

Наибольший общий делитель целых чисел находят, используя алгоритм Евклида, который впервые был описан еще в III веке до н. э. в книгах «Начал».

Пусть a и b – целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел

$$a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots > r_n$$

определена тем, что каждое r_k – остаток от деления предыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть:

$$a = bq_0 + r_1, \qquad b = r_1 q_1 + r_2, \qquad r_1 = r_2 q_{2+} r_3$$

Тогда наибольший общий делитель, НОД(*a,b),* равен последнему ненулевому члену этой последовательности.

Найдем НОД двух целых положительных чисел с использованием алгоритма Евклида в СКА Maple [6, 7]:

Пример 4: Найти НОД чисел 45 и 13.

Решим данный пример, применяя специальную программу, которая позволяет рассмотреть нахождение наибольшего общего делителя "по действиям" или пошаговое преобразование.

```
euclid1 := proc (m, n) local q, r1, r2, r, s;
r1 := m; r2 := n;
while r2 ≠ 0 do;
q := iquo(r1, r2); r := irem(r1, r2);
s := cat(convert(r1, string), "=", convert(q, string));
s := cat(s, "*", convert(r2, string), "+", convert(r, string));
printf("%s\n", s);
r1 := r2; r2 := r; od;
return (r1);end;
```

$$> euclid1(45, 13)$$

45=3*13+6

13=2*6+1

6=6*1+0

$$1$$

Рис.4. Нахождение НОД алгоритмом Евклида в СКА Maple.

Ответ: $НОД(45,13) = 1$

Данную программу можно использовать для наглядного объяснения материала ученикам.

Наиболее распространенный алгоритм отыскания НОД с помощью разложения чисел на простые множители прост, понятен и удобен, но у него есть существенный недостаток: если данные числа велики, сложно раскладываются на множители, то задача нахождения НОД становится довольно трудной. Ноиспользуя программуMaple, найти наибольший общий делитель не составит труда.

Мы рассмотрели несколько способов решения простейших задач из дисциплины «Теории чисел», применяя СКА Maple. Используя пакет Maple можно решать так же огромное количество других исследовательских или учебных проблем [1, 5, 8]. Избавление от однообразных, чреватых ошибками выкладок позволит быстрее справиться с более сложными проблемами и сохранить время для созидательной работы. Благодаря возможности перехода от аналитических к прямым вычислениям и легкость визуализации получаемых результатов делают Maple незаменимой программой для начинающих и профессионалов.

1. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель, М.: Диалектика, Вильямс, 2003. – 352 с.
2. Виноградов И. М. Элементарная теория чисел / Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985. – 996 с.
3. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. Мир.1997. – 208 с.
4. Дьяконов В.П. Maple 7. Учебный курс. СПб.: Питер, 2002. – 672 с.
5. Малиатаки В. В., Медведева Л. М., Оленев А. А. Совершенствование математической подготовки учителя в вузе на основе использования СКА Maple // Актуальные вопросы инженерного образования — 2015: Сборник научных трудов международной научно-методической конференции (Октябрьский, 27 ноября 2015 г.). Екатеринбург: Универсальная Типография «Альфа Принт», 2016. – С. 129-135.
6. Оленев А.А., Малиатаки В.В. Моделирование логических элементов и простейших узлов ЭВМ в системе компьютерной математики Maple // Информатика в школе.2017. №8(131). С. 58-63.
7. Оленев, А.А. Особенности реализации алгоритма Евклида в Maple [Текст] / А.А. Оленев // Актуальные вопросы инженерного образования: компетентностная модель выпускника – 2014: сборник научных трудов / отв. ред. К.Т. Тынчеров. – Уфа: Аркаим, 2014. – С. 80–87.

8. Оленев А.А., Малиатаки В.В., Тынчеров К.Т., Селиванова М.В. [Текст] Система компьютерной алгебры и элементарная теория чисел // Современные технологии в нефтегазовом деле -2018: сборник трудов международной научно-технической конференции: в 2-х томах. 2018. – С. 293-300.